数理解析研究所講究録
1083 巻 1999 年 134-153

粘菌方程式の数理：変分構造と力学系

鈴木貴・大阪大学大学院理学研究科
(Takashi SUZUKI · Osaka University)

平成 11 年 1 月 11 日

1 弱解と近似解

1.1 弱解概念の導入

「線形 v.s. 非線形」、「古典解 v.s. 弱解]、「正則性 v.s. 特異性」、「連続 v.s. 離散]、「決定論 v.s. 統計論」など、一見鋭く対立する概念は少し離れて双方を同時にみることによりどういう対象のどういう側面を問題としているかを明確に認識することができる。最初の軸でいうと線形偏微分方程式は作用する operator に、従ってより関数解析の方向に傾いているのに対し非線形偏微分方程式は作用を受ける function に、従ってより関数論を志向していることが了解できる。

偏微分方程式の取り扱いについては変分法、調和解析学、積分作用素論などの種々の方法が考えられて来ている。これらは同じ対象を扱っていながら激しく競合する側面を持ち、その歴史的な展開には興味深いものがある。Poisson 方程式

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{1}$$

と Laplace 方程式

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u = g \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{2}$$

は共に変分構造を持ち、前者は Sobolev 空間 $X = H_0^1(\Omega)$ 上の汎関数

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega vf$$

の停留点として、後者は affine 空間 $X = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = g \quad \text{on} \quad \partial\Omega \right\}$ 上の汎関数

$$J(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2$$

の停留点として特徴付けることができる。このアイデアは最も先行したにもかかわらずすぐに捨て去られてしまった。例えば Poisson 方程式について言

うと Perron の方法や、Fredholm の方法に取って代わられるが長い年月を経て正当な方法として復権し今日に至る。論理的問題の発見により一度は捨てたものが復活しえたのは数学自身の成熟に外ならないとすることもできようが、それでは Perron の方法や Fredholm の方法というのはどういうものであったのか。

まず Perron からいくと (2) を二つの微分不等式

$$-\Delta u \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \right\} 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \right\} g \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{3}$$

に分解して優解、劣解を定める。積分作用素を用いてこれらの概念を連続関数に拡張しておいてから例えば

$$u(x) = \sup \{ v(x) \mid v : (2) \text{ の劣解} \}$$

をとる。次に Fredholm では主要部 $-\Delta$ の parametrix であるポテンシャル、例えば 3 次元では

$$\Gamma(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$$

を用いて積分方程式

$$f(\xi) = \mu(\xi) + 2\int_{\partial\Omega} \mu(\eta) \frac{\partial}{\partial\nu} \Gamma(\xi - \eta) d\sigma(\eta) \qquad (\xi \in \partial\Omega)$$

と関係式

$$u(x) = 2\int_{\partial\Omega} \mu(\eta) \frac{\partial}{\partial\nu} \Gamma(x - \eta) d\sigma(\eta) \qquad (x \in \Omega)$$

を導出する。こうした定式化の後に、最大原理や積分方程式論（交代定理）が駆使されて解の存在・一意性・正則性が議論されることになる。

因みに変分法ではこの場合 J の X における最小化列 $\{v_k\}$ をとる。これが

$$J(v_k) \to j = \inf_X J, \qquad \|J'(v_k)\|_* = o(1)$$

をみたして Palais-Smale 列となるのである。

1.2 弱解概念の展開

これらの定式化のもたらした影響は計り知れない。それぞれの理論や方法に応じてその存在や一意性が吟味されることになるこうした解を（習慣と反する場合もあるが）弱解ということにする。

存在と一意性が確立されたとして、次に大切なことはこれらの弱解の相互の関係やそれが古典解となっているかどうかを検討することである。これが正則性の問題でありその研究方法は変分学、積分作用素論、ポテンシャル論のそれぞれにおいて相当に整備され確立されている。hard analysis という言

葉はこれらを表すことも多い。しかし非線形問題においてより根本的なことは弱解が古典解となりえないことの認識であると思われる。

例えば $1 < p < \infty$ に対して

$$-\nabla \cdot \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u = g \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{4}$$

を考える。変分法による弱解 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ が定義され一意存在が示される。$p = 2$ のときは (2) と全く同じものであるが、そうでないときは $u(x)$ は $C^{1,\alpha}$ の正則性しか持ち得ない。これは領域 Ω に $\nabla u = 0$ となる点（特異点）が出現するからであるが、このことが実は (4) の現象論的に興味深い所であり、これらの特異点の control が解析的にも重要な問題と考えられるのである。

言ってみれば、非線形の場合解に特異点や退化がおこるところで方程式の理解があいまいになる。このことを乗り越えるためには存在、一意性といった基本定理が成り立つように弱解を定義し直さなければならない。すなわち弱解とは単に古典解の要請を弱めたものではない。局所的にはそのようにする一方大域的には逆に制約を課してこうした目的を達成せんとするものなのである。

では弱解にはどのようなものがあるだろうか。(1) で言えばひとつの定式化は $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ かつ

$$\int_\Omega u \cdot (-\Delta\phi) = \int_\Omega u \cdot \phi \qquad \text{for all} \qquad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

もうひとつは $u \in H^1_0(\Omega)$ かつ

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi = \int_\Omega f\phi \qquad \text{for all} \qquad \phi \in H^1_0(\Omega)$$

であろう。いずれも試験関数 ϕ をとるところに特徴があり、前者を Schwartz 流、後者を Lax-Kato 流と言ってもよい。前者はより局所的、後者はより大域的である。どちらも線形理論から生まれてきたものだが非線形に移っても十分に役に立つ。

作用素に対する関心を取り戻すとき関数解析的な取り扱いとなるのは冒頭述べた通りである。非線形問題に広く適用できる重要な性質が単調性であって極大単調作用素論、非線形半群論を育んできた。また幾何的な問題では varifold、Aleksandroff といった非常に特徴的な弱解概念が生まれている。

最近に現れた重要な弱解のひとつは Boltzmann 方程式に対する端を発するもので試験関数の取り方を解と関連させて非線形にとるというものであり、もうひとつは Hamilton-Jacobi 方程式の研究に端を発するもので微分不等式 (3) を試験関数を用いて定式化し直すというものである。前者を renormalized solution、後者を viscosity solution と呼んでいる。

これらの方法により単調な問題からコンパクトな摂動が加えられたものを統一的に解析する手だては十分に整備されてきているといえよう。

1.3 近似解の解析

微分方程式の研究においておよそ理論と呼ばれるものは弱解をどのように定めるかという定式化であり、成功する例ではこうして解をとらえて正則性を議論してきたことが了解されるであろう。それではそれがうまくいかないときにはどのようなことがおこっているのだろうか。

思い起こしてみるとこれらの理論はまた同時に近似解の構成方法の提示でもあった。可算な近似列として作ることができることもあれば、超越的なときには背理法によって証明することもある。いずれにしろ弱解がつかまえられないときの近似解のふるまいはいくつかのパターンに分けられるのである。

ここでは関数列のふるまいとして次の3つを指摘しておく。すなわち

1. 遠方に逃げる
2. 振動する
3. 集中する

最初のは領域がコンパクトでないときに起こる。第2はベクトル値関数で1階の微分が働くときよく起こる。非線形項にキャンセルるする効果があると事前に防ぐことができ **compensated compactness** と呼ばれている。第3は楕円型や放物型で非線形項が拡散と対立する働きをするときによく起こる。変数変換により集中していく点（爆発点）の周囲の様子を詳しく **control** することができ、**concentrated compactness** と呼ばれている。このように弱解に収束しない近似解の挙動が **control** できれば従来の粗い議論ではつかまえられなかった解の存在の証明や性質の解明に役立つ。すなわち逆にこうしたことが起こらないことをひとつひとつ確認していけばよい。

次節との関わりから第3の挙動についてもう少し言及しておく。

1. このような現象は、例えば散逸的である線形部分と集中化を促進する非線形部分との競合からおこる。微少なレベルでは線形部分が支配的であるのでこうしたことがおこるためには、近似解列がある程度以上のポテンシャルを持っていなければならない。通常このような量は関数のノルムではかることができる。すなわち **concentration** がおこるとき系の支配的なノルムはある定数以上である。こうした事実は幾何学において早くから認識されておりその用語を転用して **rigidness** と呼ぶことにする。
2. こうしたことはいろいろの場所で同規模におこる。言って見ればひとつ、ふたつ、と数えることができ本来連続的であった現象が量子化される。逆にこうした量子化されたスペクトルからはずれる部分では真の解への収束が起こりうる。**concentration** をこのように **global** な立場から見ることは **topology** において盛んになされてきた。そこでこうしたことをその分野にゆかりの深い言葉である **bubble** によって表すことにする。
3. こうした現象をひきおこす方程式は、大抵変数変換 (**rescale**) に関する

ある種の不変性を持っておりこれを利用してひとつひとつの bubble の生成の様子をより詳しく control することができる。rescale された関数はもとの方程式と類似の形状をもつのであるからもとの方程式に対して開発されてきた方法が適用できる。例えば double well を見てもよいし、線形化をしてもよい。さらにもう一度 rescale をすることもできる。このような rescale を繰り返す解析は代数幾何においてよく用いられてきておりその用語に従って blow-up analysis と呼ぶことにする。

4. 最後に blow-up analysis の変形ないし強化である matched asymptotic expansion についてふれておく。通常 blow-up analysis では爆発点の極小近傍の事しかわからない。一方 bubble の遠方では解は急速に decay していく。前項の方法が成功する問題では極小近傍が遠方をコントロールしていることになる。そうでない場合にはこの二つの領域の境目、変曲点のあたりに本質的な現象が隠されていることになる。ひとつの考え方は両者がうまくつながるようにパラメータを定めることであって常微分方程式などの特異摂動問題で開発されてきた方法である。その用語を転用して matched asymptotic expansion と呼ばれ最近注目されている。

2 粘菌方程式の数理

2.1 Modelling

粘菌は通常はアメーバー状の微生物で何らかの状況によりいくつかの固まりに分かれ始めやがて胞子を作って次の世代に移行する。動物態と植物態とを経過して世代交代する奇妙な生物であるがこの生物の動物態から植物態への移行を説明するものとして 1970 年に Keller と Segel により提出されたのが放物型方程式系

$$
\begin{aligned}
u_t &= \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla\phi(v)) && \text{in} \quad \Omega\times(0,T)\\
\tau v_t &= \Delta v - av + u && \text{in} \quad \Omega\times(0,T)\\
\frac{\partial u}{\partial\nu} &= \frac{\partial v}{\partial\nu} = 0 && \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,T)\\
u|_{t=0} &= u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x) && \text{in} \quad \Omega
\end{aligned}
\tag{5}
$$

である。ただしいくつかの定数を 1 とした。ここで $\Omega\subset\mathcal{R}^2$ は境界 $\partial\Omega$ が滑らかな有界領域、ν は外向き単位法ベクトル、$u=u(x,t)$ が場所 $x\in\Omega$、時刻 $t\in(0,T)$ の粘菌の密度をあらわしている。$v=v(x,t)$ が粘菌の放出する化学物質の濃度でありこの作用を考慮すれば上記の現象が説明できるとされたのである。

(5) では最初の方程式が特徴的である。ここで $v\mapsto\phi(v)$ は単調増加で知覚関数とよばれる。 $\phi(v)=v$、$\phi(v)=v^p$、$\phi(v)=\log v$ などが用いられる。

さて この方程式は $\omega \subset \Omega$、$F = \nabla u - u\nabla\phi(v)$ に対して

$$\frac{d}{dt}\int_\omega u = \int_{\partial\omega} F \cdot \nu$$

であることを示す。すなわち $-F$ が $u(x,t)$ の流量をあらわしている。このベクトル場は $-\nabla u$ と $u\nabla\phi(v)$ の和であるが前者は粘菌がその密度勾配にしたがって外側に移動すること、すなわち拡散を示し後者は $\phi(v)$ の密度勾配に比例してその高い方向にむかうこと、すなわち走化性をあらわしている。$\phi(v)$ を知覚関数と呼ぶこともこのことから了解できるのである。

これに対し2番目の方程式は線形であり、化学物質 $v(x,t)$ が拡散し一定の割合で消滅し一定の割合で粘菌により生成されることをあらわす。境界条件は粘菌や化学物質が考えている領域の外へ流れ出さないことをあらわし、初期条件が課せられている。$\tau > 0$ は十分小さな定数で、この条件は化学物質にとっての時間が粘菌にとっての時間よりも早いスケールで流れていることを示しているのである。

方程式論としての出発点が基本定理にあることは言うまでもない。この場合方程式は準線形で多少複雑ではあるが解析半群の smoothing effect はまだ有効に働く。十分に滑らかな初期値に対しては時間局所的な古典解の一意存在を示すことはできる。初期値が非負であれば解も同様であり、$u_0 \not\equiv 0$ ならば時刻正で $u(x,t) > 0$、$v(x,t) > 0$ となることは最大原理の簡単な応用である。そこで解はどこまで延長できるかということが問題となる。延長し得る最大の時間を $T_{\max}$ と書き $T_{\max} < +\infty$ のとき解は有限時間で爆発するという。$T_{\max} = +\infty$ のときは時間大域解となる。

方程式がある関数空間のなかの不動点方程式に変換され反復法によって解けたとすると、初期値のその空間でノルムは解のノルムを上から、存在時間を下から評価することになる。このようなとき $T_{\max} < +\infty$ であれば解のノルムは時刻が $T_{\max}$ に近づくにしたがって $+\infty$ に発散することになる。古典解のままで考えると通常このノルムは非線形性が強まるほど強くとらなければならない。しかし多分この方程式系については L^∞ ノルムでよい。したがって解の爆発が起こるときはその L^∞ ノルムが $+\infty$ に発散することになる。解の爆発は現象的には粘菌が植物態に移行することと考えられるのである。

実際 1973 年 Nanjundiah [18] は $T_{\max} < +\infty$ のときにはその時刻において $u(x,t)$ は δ 関数的な形状になるだろうと予想したが、その正当性はその後の数学的な研究により確立していくことになる。

2.2 爆発条件と定常解

(5) において L^1 保存則

$$\|u(t)\|_1 = \|u_0\|_1 \qquad (0 < t < T_{\max}) \tag{6}$$

が成り立つのは見やすい。簡単のため $\phi(v)=v$ とし最初の式を

$$u_t=\nabla\cdot(u\nabla(\log u-v))$$

と書くと

$$\int_\Omega u_t(\log u-v)=-\int_\Omega u\left|\nabla(\log u-v)\right|^2$$

が得られるが (6) から

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u\log u=\int_\Omega u_t\log u$$

であり

$$\int_\Omega u_t v=\frac{d}{dt}\int_\Omega uv-\int_\Omega uv_t$$

において (5) 第2式より

$$\begin{aligned}\int_\Omega uv_t &= \int_\Omega(\tau v_t-\Delta v+av)\,v_t\\ &= \tau\int_\Omega v_t^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(|\nabla v|^2+av^2\right)\end{aligned}$$

であるから

$$W=\int_\Omega u\log u-\int_\Omega uv+\frac{1}{2}\left(\|\nabla v\|_2^2+a\|v\|_2^2\right)$$

は Lyapunov 関数、

$$\frac{d}{dt}W+\tau\int_\Omega v_t^2+\int_\Omega u\left|\nabla(\log u-v)\right|^2=0 \tag{7}$$

が成り立つ。このことは (5) の解の時間大域挙動において定常解が一定の役割を果たすことを示す。さらに (7) から自明でない定常解において定数 $\sigma>0$ により $\log u-v=\log\sigma$ となり、したがって (5) 第2式より

$$-\Delta v+av=\sigma e^v \qquad \text{in} \qquad \Omega$$

が得られる。

ここで (6) に注意して $\lambda=\|u\|_1$ とおく。$u=\sigma e^v$ から $\sigma=\lambda/\int_\Omega e^v$ となり λ をパラメータとして楕円型境界値問題

$$-\Delta v+av=\lambda e^v/\int_\Omega e^v \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial v}{\partial\nu}=0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{8}$$

が出現する。(8) は常に定数解 $v=\lambda/a|\Omega|$ を持っている。

1981 年 Childress と Percus はこれを Ω : 円板 v : 回転対称で考え数値計算を試みて次のように考えた。

1. $0<\lambda<8\pi$ ではこの場合定数以外に解はない

2. 爆発が起こるとすれば解の形状は回転対称に近づくはずである
3. 従って任意の領域において $\|u_0\|_1 < 8\pi$ ならば (5) において解の爆発は起こらず、逆に $\|u_0\|_1 > 8\pi$ のときは解の爆発が起こり得る

この予想は Jäger-Luckhaus [10]、Nagai [14]、Herrero-Velázquez [7] [8] [9] により研究されてきた。特に Nagai-Senba-Yoshida [16] は次のことを示している。

1. Ω : 円板、$u_0 = u_0(|x|)$、$v_0 = v_0(|x|)$ の場合確かに $\|u_0\|_1 < 8\pi$ のときは $T_{\max} = +\infty$ となる
2. それ以外の場合は $\|u_0\|_1 < 4\pi$ のとき $T_{\max} = +\infty$ となる

解の爆発については上記の論文により詳しく議論されてきた。それにより上の定理の第 1 項は sharp であることがわかる。第 2 項と Childress-Percus の予想とのくいちがいが生ずる理由は Nagai-Senba-Suzuki [15] によりある程度理解できる。この論文では次のことが示されている。

1. $4\pi \leq \|u_0\|_1 < 8\pi$ で $T_{\max} < +\infty$ のときは解は境界上の 1 点に集中してくる
2. 一般に孤立爆発点においては $u(x,t)dx$ は $t \uparrow T_{\max}$ において 8π 以上の mass をもつ δ 関数に集積する

2.3 bubble としての植物態移行

上の第 2 項と関連することであるが、実は孤立しない爆発点や 8π より大きい mass の存在は知られていない。このことからこうしたことはありえないのではないかという予想がたち、そうであるとすると粘菌の植物態移行は bubble なのではないかと考えられる。実際上記の Jäger-Luckhauss 以来の仕事は rigidness に関するものであり Herrero と Velázquez による 2 つの論文では matched asymptotic expansion が用いられているのである！また第 1 項と関連して Childress-Percus の「誤り」は回転対称な解のみを考えているところにあり実は回転対称な解は時間局所的にも不安定ではないかとも考えられる。こうしたことを理解する上で (5) の定常解の構造の解明が役立つことを述べてみたい。

まず (8) には変分構造が存在する。すなわちその解は $H^1(\Omega)$ 上の汎関数

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{a}{2}\|v\|_2^2 - \lambda \log\left(\fint_\Omega e^v\right)$$

の停留点である。このことから解 $v(x)$ のまわりの線形化作用素は $L^2(\Omega)$ 内の自己共役作用素 $A_\lambda(v)$ であり $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ 上の双線形形式

$$\mathcal{L}_\lambda(\phi,\phi) = \int_\Omega \left(|\nabla\phi|^2 - p\phi^2\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\fint_\Omega p\phi\right)^2 + a\int_\Omega \phi^2$$

に付随することになる。ただし $⨍_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega$、$p = \lambda e^v / \int_\Omega e^v$ である。特に定数解についてはその線形化固有値や固有関数を $-\Delta_N$ のそれらにより定めることができる。こうした線形化固有値と安定性との関係には次のような関係がある。

定理 1 $V(x)$ が $\lambda > 0$ に対する *(8)* の解で $A_\lambda(V)$ の固有値がすべて正であるようなものとすると *(5)* の定常解 (U, V) ただし $U = \lambda e^V / \int_\Omega e^V$ は安定である。すなわち初期値 (u_0, v_0) が

$$\|u_0\|_1 = \lambda, \qquad \|u_0 - U\|_{L\log L} \ll 1, \qquad \|v_0 - V\|_{H^1(\Omega)} \ll 1$$

をみたすとき $T_{\max} = +\infty$ であり

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t) - U\|_\infty = \lim_{t\to+\infty} \|v(t) - V\|_\infty = 0$$

となる。ここで $\|\cdot\|_{L\log L}$ は *Zygmund* ノルムである。

そこで (8) の解集合の構造であるが次の定理が基本的である。

定理 2 固定された $a > 0$ に対し $\{v_\lambda\}$ を *(8)* の解の族で

$$\lambda \longrightarrow \lambda_0 \in [0, +\infty), \qquad \|v_\lambda\|_\infty \longrightarrow +\infty$$

なるものとすると部分族に対して整数 $\ell = 1, 2, \cdots$ が存在して $\lambda_0 = 4\pi\ell$ となる。ℓ は境界上の爆発点の個数と内部爆発点の個数の 2 倍を足したものであり、爆発点の位置や極限関数は線形部分 $(-\Delta + a)_N$ の *Green* 関数で *control* できる。

これを用いると次の事が証明できる。

1. $0 < \lambda \ll 1$ では非定数解は存在しない
2. Ω : 有限連結で $\lambda_1 = |\Omega|(a + \mu_2^*) < 4\pi$ のとき $\lambda \in (\lambda_1, 4\pi)$ において $J_\lambda(v)$ の非定数 global minimizer が存在する
3. Ω : 有限連結で $\lambda_1 > 4\pi$ のときは $\lambda \in (4\pi, \lambda_1) \setminus 4\pi\mathcal{N}$ において $J_\lambda(v)$ の mountain pass 臨界点が存在する

ただし μ_2^* は $-\Delta_N$ の第 2 固有値をあらわす。Polyá-Szegö の等周不等式から $|\Omega|\mu_2^* \le \ell^2\pi$、$\ell = 1.841...$ であり $0 < a \ll 1$ では $\lambda_1 < 4\pi$ となることに注意。

最後は解の安定性に関する示唆に富む定理である。

定理 3 Ω : 単連結とすると $\delta > 0$ が存在して各 $\lambda \in (4\pi, 4\pi + \delta)$ に対し $a > 0$ が十分小さければ *(8)* のすべての解 $v(x)$ の線形化作用素 $A_\lambda(v)$ は負の固有値をもつ

これらの定理から (8) の解の構造に関する [5] の数値計算に基づく予想の精密化、特に隠された解の存在が得られ、またそれにより (5) の解の挙動に関する新しい示唆が得られた ([21])。

3 指数型非線形問題の物理と数理

3.1 渦点の統計力学

数学的には (8) は 2 次元 Euler 流の vortex points に関する統計力学 (propagation of chaos) および常温超伝導に関する Chern-Simons-Higgs のゲージ理論 (multi-vortices の発生) と深く関連している ([3], [12], [23])。実際最終的に前者は有界領域 $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ 上の

$$-\Delta v = \lambda e^v / \int_\Omega e^v \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad v = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{9}$$

に、後者は flat torus $\Omega = \mathcal{R}/a\mathcal{Z} \times b\mathcal{Z}$ 上の

$$-\Delta v = \lambda \left(\frac{e^v}{\int_\Omega e^v} - \frac{1}{|\Omega|} \right) \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \int_\Omega v = 0 \tag{10}$$

に帰着される。この節では両者の物理的背景とその数学解析の現状について述べる。

古典統計力学において Gibbs 測度と呼ばれるものは Newton 方程式の発展系に対して定常的であり、その一方で系の熱力学的挙動と関連する構造を支配する。このことから考えて完全乱流を記述する自然な方法は Euler 方程式の不変測度を調べることであろう。実際 2 次元の場合は形式的にはこのようなことが可能であり Gibbs の処方箋に従って一連の Gauss 測度が不変測度として構成できる。ところがこのような単純なモデルで数値計算しても実験とは合わない。

この困難を切り抜ける一つの方法は Onsager [20] によるものである。まず渦場を δ 関数の一次結合として時空間上に制約すると Euler 方程式は有限次元 Hamilton 系に帰着される。この場合 Hamiltonian は $\alpha > 0$ を渦の強度として $\alpha^2 K$ ただし

$$K(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{1 \le i \ne j \le N} G(x_i, x_j) + \sum_{j=1}^N R(x_j)$$

で与えられる。N が渦点の数、$(x_1, \cdots, x_N) \in \Omega^N$ が渦点の位置に相当する変数、$\Omega \subset \mathcal{R}^2$ が考えている有界領域 $G(x, y)$ は $-\Delta_D$ の Green 関数であって

$$R(x) = \left[G(x, y) + \frac{1}{2\pi} \log |x - y| \right]_{y=x}$$

は Robin 関数である。これに基づいて統計力学を展開する。すなわち inverse temperature に比例するパラメータ $\tilde{\beta}$ をもつ Gibbs 測度

$$\mu^{\alpha, \tilde{\beta}, N}(dx_1 \cdots dx_N) = Z^{-1}_{\alpha, \tilde{;} N} e^{-\tilde{\beta}\alpha^2 K(x_1, \cdots, x_N)} dx_1 \cdots dx_N$$

ただし

$$Z_{\alpha,\tilde{\beta},N} = \int_{\Omega^N} e^{-\alpha^2\tilde{\beta}K} dx_1 \cdots dx_N$$

が導入できる。平均場極限をとるために β を固定して $\alpha = 1/N$, $\tilde{\beta} = \beta N$ とする。

$$Z(N) = Z_{\alpha,\tilde{\beta},N} < +\infty$$

となるのは $\beta > -8\pi$ であることがわかる。$N \to +\infty$ における

$$\mu_N = \mu^{\alpha,\tilde{\beta},N}(dx_1, \cdots, dx_N)$$

の挙動を知るために相関関数

$$\rho_j^N(x_1, \cdots, x_N) = \int dx_{j+1} \cdots dx_N \mu^N(x_1, \cdots, x_N) \tag{11}$$

を導入する。渦点系の経験分布

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{x_j}(dx)$$

が一つの vorticity profile ρ をもつ large probability に収束するとすれば

$$\rho_j^N \to \rho^{\otimes j} \qquad \text{(weakly)} \tag{12}$$

となるはずであり、ひとつひとつの渦点が同じ軌道のコピーに近い振る舞いをする propagation of chaos と呼ぶ現象がおこる。

$\rho(x)$ のみたすべき条件は形式的には次のようにして得られる。実際変数 $X_j = (x_1, \cdots, x_N)$, $X_{N-j} = (x_{j+1}, \cdots, x_N)$ を導入すると簡単な計算から (11) は

$$\begin{aligned} \rho_j^N(X_j) &= \frac{Z(N-j)}{Z(N)} e^{-\frac{\beta}{N}K(X_j)} \prod_{i=1}^{j} \int \mu^{N-j}(dX_{N-j}) \\ &\quad \times e^{-\frac{\beta}{N}\sum_{N-j}^{k=1} G(x_i,x_k)} \cdot e^{\frac{j\beta}{N(N-j)}K(X_{N-j})} \end{aligned}$$

と書ける。(12) が成り立つものとすると

$$\rho(x) = Z^{-1} e^{-\beta V_\rho} \cdot e^{\frac{1}{2}\beta(\rho, V_\rho)} \tag{13}$$

が得られる。ただし

$$V_\rho(x) = \int_\Omega G(x,y)\rho(y)dy, \qquad Z = \lim_{N\to\infty} \frac{Z(N)}{Z(N-1)}$$

である。$\beta = -\lambda$ として (13) は (9) と同値である。より正確には次の定理が得られる。

定理 4 $\{d\rho_j\}_{j=1}^{\infty}$ を ρ_j^N の弱集積測度、すなわちある $N_k \to +\infty$ に対して

$$\int d\rho_j\left(X_j\right)\phi\left(X_j\right) = \lim_{k\to+\infty}\int dX_j \rho_j^{N_k}\left(X_j\right)\phi\left(X_j\right)$$

がすべての j と有界連続関数 ϕ に対して成り立つものとすれば $d\rho_j$ は絶対連続で関係

$$d\rho_j\left(X_j\right) = \rho\left(X_j\right)dX_j$$

および

$$\rho_j\left(x_1,\cdots,x_j\right) = \int \nu(d\rho)\prod_{k=1}^{j}\rho(x_k)$$

が成り立つ。ただし ν は弱位相を備えた $L^1(\Omega)$ 上の *Borel* 確率測度でその台は $\beta > 0$, $\beta < 0$ に従って汎関数

$$F(\rho) = \frac{1}{\beta}\int_{\Omega}\rho\log\rho + \frac{1}{2}\left(\rho, V_{\rho}\right)$$

を制約 $\rho \geq 0$, $\int_{\Omega}\rho = 1$ のもとに最大または最小にする関数 $\rho \in L^{\infty}(\Omega)$ 上にある。

neutral vortex gas では標準的熱力学的極限には negative temperature state は存在しない ([6]) がこの場合は意味があるものとして興味がもたれている。一方標準的 Gibbs 測度から k 渦点系で energy spectrum を計算すると $O(k^{-1})$ の非物理的項が生ずる。平均場極限においてこの項は消えて fluctuation を失うことになるので Gibbs 測度では乱流現象を記述できないおそれもある。しかし数値計算により渦点が局所的には円状の集積体を生成する傾向があることが報告されており、こうしたものが平均場方程式 (13) と関連する可能性も高い。これは局所的な証拠だが large time scale では不変測度がこうしたものの重ね合わせであることが期待されている。

以上は統計物理学および確率論であるが、解析学および微分方程式論の立場から次のことに注意しておきたい。

1. $Z(N) < +\infty$ と $\beta > -8\pi$ の同値性は前節で述べた (5) の大域解の存在と密接な関係がある。すなわちこれらは Moser-Onofri の不等式 ([13], [19]) からも Brezis-Merle の不等式 ([2]) からも証明することができ、またこれらの不等式は互いに関連している。
2. 渦点の従う Hamiltonian は実は (9) の解の族の爆発点の位置を定める関数と同じである。すなわち N 個の爆発点があればそれらは K の停留点となる。これは [17] で示され、また (8) でも同様の事実がある。このことは一見何の関連もないようであるが筆者にとっては大変な驚きであった。ところがさらに統計力学的な背景を考えれば実は自然なことのようなのである。

3. 定理で述べられた ρ に関する変分問題は (9) に対する

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \log\left(\fint_\Omega e^v\right)$$

の双対であり Euler 方程式は (9) と同値なものとなる。この問題は [22] によって $0 < \lambda < 8\pi$, Ω : 単連結では解が一意であることが示されているので定理において部分列をとる議論が帳消しとなる。すなわち単連結有界領域において propagation of chaos が証明されたことになる。一方最近の研究で (5) の Lyapunov 関数と (8) の双対変分構造との関連が解明されつつあり、その力学系の解明に対する応用が注目される。

3.2 常温超伝導に関するゲージ理論

この理論は anyon model とよばれ、その condensate (multi-vortex) 解が常温超伝導等、いろいろな分野で関心を集めているものである。数学的には metric tensor を diag$(1,-1,-1)$ とする (2+1)-Minkowski 空間 $R^{2,1}$ での古典場の理論であって、Lagrangean はスカラー (Higgs) 場、Yang-Mills (Maxwell) 場、および Chern-Simons ゲージ場の coupling である。最後の Chern-Simons 項が電磁 charge の multi-vortices (anyon) を発生させていると考えられる。このままでは Euler-Lagrange 方程式が複雑であるから Yang-Mills 項を取り除いたもの (reduced Abelian Chern-Simons-Higgs 系) の condensate 解を考えるがこれは large distances と low energies で正当とされている。さらに Taubes らの古典的な vortex 理論 ([24], [25]) と同様の方法により、複素変数を用いると定常 vortex 解のみたすべき方程式系が Bogomol'ny([1]) 型の self-dual なものとなるように Higgs ポテンシャルを選ぶことができる。このようにして得られたものは全平面 $\mathcal{R}^2$ における 2 階の非線形楕円型方程式で ground state な解として確かに symmetric vacuume が現れている。この方程式において electric charge や magnetic charge が量子化された解が topological solution であり、non-topological solution ではこれらが fractal である。どちらも Spruck, Yang, Wang, Jackiw, Lee, Weinberg 達によってその存在が証明された。'tHooft([26]) の周期条件下でも同様な議論ができる。Higgs 項の零点を指定し Chern-Simons の coupling 定数 $k > 0$ を十分小さくしたとき multi-vortex 解が存在することが Caffarelli と Yang により証明されている。[23] は変分法により mountain pass type の第 2 の解の存在を証明しそれが $k \downarrow 0$ に収束した極限で (10) をみたしていることをつきとめた。したがってこの方程式 (10) の解の構造がすべて明らかになれば、第 2 の multi-vortex 解の性質やその（多重）存在の問題は明確になる。[23] は前小節で述べた (9) に関する [22] に対応する結果（一意性）を想定したが、その後の研究でこの点に関しては両者は著しく相違していることがわかってきている。

詳細を述べよう。まずゲージ場 A から主バンドル $R^{2,1}\times U(1)$ 上の接続を

$$A=-\imath A_\eta dx^\eta,\quad A_\eta=A_\eta(x)\in\mathcal{R},\qquad x=(x_0,x_1,x_2)\quad \eta=0,1,2$$

で、共変微分を $D_A=d-\imath A$ で定めると Yang-Mills 場は

$$F_A=\frac{-\imath}{2}F_{\alpha,\beta}dx^\alpha\wedge dx^\beta$$

ただし

$$F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha,\quad \alpha,\beta=0,1,2$$

となる。一方 Higgs のスカラー場は付随バンドル $\mathcal{R}^{2,1}\times\mathcal{C}$ 上の複素数値 section ϕ であって

$$D_A\phi=D_\eta\phi dx^\eta\qquad D_\eta\phi=\partial_\eta\phi-\imath A_\eta\phi\qquad \eta=0,1,2$$

とするとき Chern-Simons-Higgs の Lagrangean は

$$\mathcal{L}(A,\phi)=(D_\eta\phi)\left(\overline{D^\eta\phi}\right)+\frac{k}{4}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}A_\gamma-V\left(|\phi|\right)$$

で与えられる。ただし $V=V\left(|\phi|\right)$ が $U(1)$ 不変な Higgs ポテンシャル、$k>0$ は Chern-Simons の coupling 定数、Levi-Civita テンソル $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$, $\alpha,\beta,\gamma=0,1,2$ は $\varepsilon^{012}=1$ により正規化する。$\mathcal{L}$ に対する Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}k\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\beta\gamma}&=\imath\left(\phi\overline{D^\alpha\phi}-\overline{\phi}D^\alpha\phi\right)\\ D\eta\left(D^\eta\phi\right)&=-\frac{\partial V}{\partial\overline{\phi}}\end{aligned}$$

である。

ここで状態は静的であるとし、この方程式が Bogomol'ny type の self-dual なものであるという要請を加えると Higgs ポテンシャルが

$$V(\phi)=\frac{1}{k^2}|\phi|^2\left(1-|\phi|^2\right)^2$$

という形に選択され、静的エネルギー密度

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(A,\phi)&=|D_1\phi|^2+|D_2\phi|^2\\ &\qquad+\frac{k^2}{4}\frac{F_{12}^2}{|\phi|^2}+\frac{1}{k^2}|\phi|^2\left(1-|\phi|^2\right)^2\end{aligned}$$

があらわれる。次に $\boldsymbol{a}^j\in\mathcal{R}^2$, $j=1,2$ を独立なベクトルとする basic cell

$$\Omega=\left\{x=s_1\boldsymbol{a}^1+s_2\boldsymbol{a}^2\mid s_1,s_2\in\mathcal{R}/\mathcal{Z}\right\}$$

上で方程式を考えると、ゲージ不変性

$$\phi\mapsto e^{\imath\omega(x)}\phi,\quad A_0\mapsto A_0,\quad A_j\mapsto A_j+\partial_j\omega;\ j=1,2$$

と適合する境界条件として 'tHooft の周期条件

$$
\begin{aligned}
e^{\imath\xi_k\left(x+\boldsymbol{a}^k\right)}\phi\left(x+\boldsymbol{a}^k\right) &= e^{\imath\xi_k(x)}\phi(x) \\
A_0\left(x+\boldsymbol{a}^k\right) &= A_0(x) \\
\left(A_j+\partial_j\xi_k\right)\left(x+\boldsymbol{a}^k\right) &= \left(A_j+\partial_j\xi_k\right)(x)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

があらわれる。ただし $j=1,2$, $x\in\Gamma^1\cup\Gamma^2\setminus\Gamma^k$, $k=1,2$,

$$
\Gamma^j=\left\{x=s_j\boldsymbol{a}^j \mid s_j\in\mathcal{R}/\mathcal{Z}\right\}
$$

である。ϕ が一価の複素数値関数であることから、(14) から N を整数として

$$
\begin{aligned}
\xi_1(1,1_-) &- \xi_(1,0_+)+\xi_1(0,0_+)-\xi_1(0,1_-)+\xi_2(0_+,1) \\
&- \xi_2(1_-,1)+\xi_2(1_-,0)-\xi_2(0_+,0)+2\pi N=0
\end{aligned}
$$

となり、magnetic flux と electric charge はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega F_{12} &= \int_{\partial\Omega} A_j dx^j = 2\pi N \\
\int_\Omega kF_{12} &= 2\pi kN
\end{aligned}
$$

のように量子化される。ただし $\xi_k(s_1,s_2)=\xi_k\left(s_1\boldsymbol{a}^1+s_2\boldsymbol{a}^2\right)$ とした。
実際記号 $\varepsilon_{jk}=-\varepsilon_{kj}$, $k=1,2$, $\varepsilon^{12}=1$ を用いてエネルギー密度を

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(A,\phi) &= \frac{1}{4}\left[\frac{k}{|\phi|}F_{12}+\frac{2}{k}|\phi|\left(|\phi|^2-1\right)\right]^2\left|D_1\phi+\imath D_2\phi\right|^2 \\
&\quad +F_{12}+\mathrm{Im}\left\{\partial_j\varepsilon_{jk}\overline{\phi}D_k\phi\right\}
\end{aligned}
$$

と書き直し

$$
\int_\Omega \partial_j\varepsilon_{jk}\overline{\phi}D_k\phi=0
$$

を用いればエネルギー汎関数に関する不等式

$$
\begin{aligned}
E(A,\phi) &= \int_\Omega\mathcal{E}=\int_\Omega\frac{1}{4}\left[\frac{k}{|\phi|}F_{12}+\frac{2}{k}|\phi|\left(|\phi|^2-1\right)\right]^2 \\
&+ \int_\Omega\left|D_1\phi+\imath D_2\phi\right|^2+\int_\Omega F_{12} \\
&\geq \int_\Omega F_{12}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よってホモトピックな制約条件

$$
\int_\Omega F_{12}=2\pi N
$$

のもとで E を最小化する (A, ϕ) のみたすべき方程式は次のような self-dual なものになることがわかる。

$$\begin{aligned} D_1\phi + \imath D_2\phi &= 0 \\ F_{12} + \frac{2}{k^2}|\phi|^2\left(|\phi|^2 - 1\right) &= 0 \\ kF_{12} + 2A_0|\phi|^2 &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

複素構造により1階の方程式系 (15) はさらに次のように2階単独半線形方程式に帰着できる。まず $\hat{A} = A_1 + \imath A_2$, $\overline{\partial} = (\partial_1 + \imath\partial_2)/2$ を用いると第一式は

$$2\overline{\partial}\phi - \imath\hat{A}\phi = 0$$

と書ける。ϕ は適当な正の関数と正則関数を掛けたものであり、従って Ω 内で重複度も込めて有限の零点を持ちさらに

$$\hat{A} = -2\imath\overline{\partial}\log\phi \tag{16}$$

である。一方 $Z(\phi) = \{p_1, \cdots, p_N\}$ を重複度も含めた ϕ の零点とし $z = x_1 + \imath x_2$ に対して $u(z) = \log|\phi(z)|^2$ とおくと ϕ は

$$\phi(z) = \exp\left(\frac{1}{2}u(z) + \imath\sum_{j=1}^{N}\arg(z - p_j)\right) \tag{17}$$

で与えられる。虚数部分の不確定度は単に方程式のゲージ不変性を反映したものにすぎない。(16) により A_1, A_2 は

$$\begin{aligned} A_1 &= -\mathrm{Re}\left(2\imath\overline{\partial}\log\phi\right) \\ A_2 &= -\mathrm{Im}\left(2\imath\overline{\partial}\log\phi\right) \end{aligned} \tag{18}$$

と (17) から、また (15) 第3式より A_0 は

$$A_0 = -\frac{kF_{12}}{2|\phi|^2} = -\frac{k}{2|\phi|^2}\left(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1\right)$$

で定まる。(18) より $\Omega \setminus Z(\phi)$ において $F_{12} = -\frac{1}{2}\Delta u$ であるから (15) 第2式より

$$\Delta u = \frac{4}{k^2}e^u\left(e^u - 1\right) \qquad \text{in} \qquad \Omega \setminus Z(\phi)$$

となる。一方 n_k を p_k の重複度として

$$u(z) = n_k \log|z - p_k|^2 \qquad \text{as} \qquad z \to p_k$$

であるからまとめると flat torous Ω 上の半線形楕円型方程式

$$\Delta u = \frac{4}{k^2}e^u\left(e^u - 1\right) + 4\pi\sum_{j=1}^{N}\delta_{p_j} \tag{19}$$

が出現する。ここで δ_p は点 p に台を持つ Dirac 測度である。

さらに

$$\Delta u_0 = -\frac{4\pi N}{|\Omega|} + 4\pi \sum_{j=1}^{N} \delta_{p_j} \qquad \int_\Omega u_0 = 0$$

なる $u_0 \in W^{1,q}(\Omega)$, $(1 < q < 2)$ を導入し $\lambda = 4/(k^2)$, $u = u_0 + v$ と書くと

$$\Delta v = \lambda e^{u_0+v}\left(e^{u_0+v} - 1\right) + \frac{4\pi N}{|\Omega|} \qquad v \in H^1(\Omega) \tag{20}$$

となる。(20) に関して次のことがいえる。

定理 5 *1.* $\lambda_c > 16\pi N/|\Omega|$ に対して次が成り立つ。

(a) $\lambda > \lambda_c$ では $v_\lambda^1 < v_\lambda^2 < -u_0$ をみたす二つの解 v_λ^1, v_λ^2 が存在する。

(b) $\lambda = \lambda_c$ では $v_* < v_\lambda^2$, $(\lambda > \lambda_c)$ をみたす解 v_* が存在する。

(c) $\lambda < \lambda_c$ では解は存在しない。

2. $\lambda \to +\infty$ において解は次のようにふるまう。

(a) 最大解 v_λ^2 は

$$v_\lambda^2 \longrightarrow -u_0 \qquad in \qquad W^{1,q}(\Omega)$$

(b) $N = 1$ のとき第 2 の解 v_λ^1 は $v_\lambda^1 = w_\lambda + c_\lambda$, $c_\lambda \in \mathcal{R}$, $\int_\Omega w = 0$ と分解するとき $H^1(\Omega)$ の位相で $\lambda \to +\infty$ において

$$-\Delta w_0 = 4\pi\left(\frac{e^{u_0+w_0}}{\int_\Omega e^{u_0+w_0}} - \frac{1}{|\Omega|}\right) \qquad \int_\Omega w_0 = 0 \tag{21}$$

の解 w_0 に集積する。

少々乱暴であるが $u_0 = 0$ とした場合 (21) は確かに $\lambda = 4\pi$ に対する (10) となっている。

(20) から (21) は形式的には次のように導出する。まず $v = w + c$, $\int_\Omega w = 0$, $c \in \mathcal{R}$ と分解する。

$$\Delta w = \lambda e^c\left(e^c \cdot e^{u_0+w} - 1\right)e^{u_0+w} + \frac{4\pi N}{|\Omega|}, \qquad \int_\Omega w = 0 \tag{22}$$

となるから

$$0 = e^{2c} \cdot \int_\Omega e^{2(u_0+w)} - e^c \int Omega e^{u_0+w} + 4\pi N/\lambda$$

よって

$$e^c = \frac{\int_\Omega e^{u_0+w} \pm \sqrt{\left(\int_\Omega e^{u_0+w}\right)^2 - \frac{16\pi N}{\lambda}\int_\Omega e^{2(u_0+w)}}}{2\int_\Omega e^{2(u_0+w)}}$$

となる。複合で − をとる解であるとすると

$$\lambda e^c = \frac{8\pi N}{\int_\Omega e^{u_0+w} + \sqrt{\left(\int_\Omega e^{u_0+w}\right)^2 - \frac{16\pi N}{\lambda}\int_\Omega e^{2(u_0+w)}}}$$

であり $\lambda = \lambda_k \to +\infty$, $w = w_{\lambda_k} \to w_0$ とすれば

$$\lambda_k e^{c_k} \to \frac{4\pi N}{\int_\Omega e^{u_0+w}}, \qquad e^{c_k} \to 0$$

となって (22) から

$$-\Delta w_0 = 4\pi \left(\frac{N e^{u_0+w_0}}{\int_\Omega e^{u_0+w_0}} - \frac{1}{|\Omega|} \right), \qquad \int_\Omega w_0 = 0$$

が得られる。

定理の証明であるが第一の解は安定で super-sub solution の方法でとらえることができる。解全体の構造は Ambrosetti-Prodi 型であり第2の解は mountain pass lemma を適用することになる。ただし $\lambda \to +\infty$ の挙動を解明するために [23] は Nehari 変分法からヒントを得た興味深い方法を考案している。。

参考文献

[1] Bogomol'ny, E.M., *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449-454.

[2] Brezis, H., Merle, F., *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of* $-\Delta u = V(x)e^u$ *in two dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991) 1223-1253.

[3] Caglioti, E., Lions, P.L., Machioro, C., Pulvirenti, M., *A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: a statistical mechanics description*, Comm. Math. Phys. **143** (1992) 401-425; **174** (1995) 229-260

[4] Childress, S., *Chemotactic collapse in two dimensions*, in; Lecture Notes in Biomath. **55**, Springer, 1984, pp.65-66

[5] Childress, S., Percus, J.K., *Nonlinear aspects of chemotaxis*, Math. Bios. **56** (1981) 217-237

[6] Fröhlich, J., Ruelle, D., Comm. Math. Phys. **87** 1-36.

[7] Herrero, M.A., Velázquez, J.J.L., *Singularity patterns ina chemotaxis model*, Math. Ann. **306** (1996) 583-623

[8] Herrero, M.A., Velázquez, J.J.L., *Chemotaxis collaplse for the Keller-Segel model*, J. Math. Biol. **35** (1996) 177-194

[9] Herrero, M.A., Velázquez, J.J.L., *A blow-up mechanism for a chemotaxis model*, Ann. Scoul. Norm. Sup. Pisa IV **35** (1997) 633-683.

[10] Jäger, W., Luckhauss, S., *On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992) 819-824

[11] Keller, E.F., Segel, L.A., *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol. **26** (1970) 399-415

[12] Kiessling, M.K.-H., *Statistical mechanics of classical particles with logarighmic interactions*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993) 27-56

[13] Moser, J., *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1971) 1077-1092.

[14] Nagai, T., *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci. Appl. **5** (1995) 581-601

[15] Nagai, T., Senba, T., Suzuki, T., *Concentration behavior of bolow-up solutions for a simplified system of chemotaxis*, preprint

[16] Nagai, T., Senba T., Yoshida, K., *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funckcjal. Ekvc. **40** (1997) 411-433

[17] Nagasaki, K., Suzuki, T., *Asymptotic analysis for two-dimensional elliptic eigenvalue problems with exponentially-dominated nonlinearities*, Asymptotic Analysis **3** (1990) 173-188.

[18] Nanjundiah, V., *Chemotaxis, signal relaying, and aggregation morphology*, J. Theor. Biol. **42** (1973) 63-105.

[19] Onofri, E., *On the positivity of the effective action in a theory of random surfaces*, Comm. Math. Phys. **86** (1982) 321-326.

[20] Onsager, L., Suppl. Nuovo Cim. **6** (1949) 279.

[21] Senba, T., Suzuki, T., *Some structures of the solution set for a stationary system of chemotaxis*, preprint

[22] Suzuki, T., *Global analysis for a two-dimensional elliptic eigenvalue problem with the exponential nonlinearity*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse no linéaire **9** (1992) 367-398.

[23] Tarantello, G., *Multiple condensate solutions for the Chern-Simons-Higgs theory*, J. Math. Phys. **37** (1996) 3769-3796

[24] Taubes, C.H., *Arbitrary N-vortex solutions to the first order Ginzburg-Landau equations*, Comm. Math. Phys. **72** (1980) 277-292.

[25] Taubes, C.H., *On the equivalence of the first and second order equations for gauge theories*, Comm. Math. Phys. **75** (1980) 207-227.

[26] 'tHooft, G., *A property of electric and magnetic flux in nonabelian gauge theories*, Nucl. Phys. **153B** (1979) 141-160.